Krize matematiky, nekonečné množiny a Brno

První krize matematiky

Ve své historii matematika zaznamenala několik závažných krizí. Tou první byl *objev nesouměřitelnosti.* Pro *Pythagorejce,* filozofickou školu v antickém Řecku, vycházející z ezoterických úvah o číslech. Bez nadsázky lze říct, že číslům přisuzovali božskou podstatu a z čísel měl podle nich být stvořen celý svět.

Za čísla ovšem považovali pouze čísla tzv. *souměřitelná,* tj. v dnešní terminologii čísla *racionální.* Pythagorejcům se tedy doslova zhroutil svět, když se ukázalo, že $\sqrt{2}$ racionální není – a přitom jde o délku úhlopříčky čtverce o délce strany 1, takže poměrně běžnou záležitost!

Objev iracionality $\sqrt{2}$ se dnes připisuje *Hippasovi z Metapontu,* který měl být za tento objev bohy potrestán utopením (ve skutečnosti jej s nejvyšší pravděpodobností zabili jeho souvěrci, aby se tato kacířská myšlenka nerozšířila dále). Jiné zdroje ale uvádějí, že tento trest jej stihl za vyzrazení, jak do koule vepsat dvanáctistěn, kteréžto tajemství si Pythagorejci pečlivě střežili.

V každém případě tento objev znamenal *první krizi matematiky.* Ta se rozřešila jednoduše: Matematici se od aritmetiky přesunuli ke geometrii, kde iracionální čísla vůbec nevadí. Díky tomu též mohl řecký matematik *Eukleides* koncem 4. stol. př. n. l. napsat 13 knih, souhrnně zvaných *Základy.* Na střední škole se přitom nenaučíme nic, co by již v *Základech* nebylo obsaženo.

Druhá krize matematiky

Jedním z nejmocnějších nástrojů matematiky, bez nějž by vůbec nemohla existovat současná fyzika, je diferenciální a integrální počet, neboli *kalkulus* – s ním se podrobněji seznámí ti z vás, kdo budou matematiku studovat v semináři, nebo se s ní setkají na vysoké škole. Za její autory se považují *Isaac Newton* a *Gottfried Leibniz;* o autorství vedli ve své době velmi ostré spory, přičemž dnes se ale připisuje oběma – Newton pravděpodobně kalkulus objevil dříve, ale Leibniz jej jako první publikoval.

U kalkulu však nastal problém: Pracoval s nepřesně definovanými „nekonečně malými veličinami," a i když byl velmi užitečný, tato neschopnost jej v matematice korektně ukotvit vedla ke *druhé krizi matematiky.* Krizi rozřešili až v 19. století především matematici *Cauchy, Riemann* a *Weierstrass,* když jejich přístup opět přehoupl kyvadlo od geometrie zpět k aritmetice.

Nekonečné množiny

Než se dostaneme k poslední, třetí krizi matematiky, povíme si něco o nekonečnu. Nekonečno není číslo, a tak se často chová dosti podivně. Položme si například otázku: „Je více přirozených čísel, nebo sudých přirozených čísel?“

Na první pohled se zdá, že otázka pozbývá smyslu. Vždyť přece přirozená čísla jsou čísla sudá, a ještě k tomu lichá, tak jich musí být více!

Jenže co když čísla „pospojujeme“ následujícím způsobem:

$$\begin{gathered} 1 \leftrightarrow 2 \\ 2 \leftrightarrow 4 \\ 3 \leftrightarrow 6 \\ 4 \leftrightarrow 8 \\ \vdots \\ n \leftrightarrow 2n \\ \vdots \end{gathered}$$

Každé přirozené číslo má svého partnera v sudých číslech a žádné nezbylo – takže všech přirozených čísel a i sudých čísel je stejně! Vidíme tedy názorně, že pokud uvažujeme o nekonečnu (nebo o nekonečných množinách), musíme být velmi opatrní, protože spoustu výsledků se nám bude zdát „divných“.

Stejným způsobem nyní dokážeme, že přirozených čísel je stejně jako celých čísel:

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow 0 \\ 2 &\leftrightarrow 1 \\ 3 &\leftrightarrow -1 \\ 4 &\leftrightarrow 2 \\ 5 &\leftrightarrow -2 \\ 6 &\leftrightarrow 3 \\ 7 &\leftrightarrow -3 \\ &\vdots \\ n &\leftrightarrow \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{pokud je } n \text{ sudé} \\ \frac{n-1}{2}, & \text{pokud je } n \text{ liché} \end{cases} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Platí dokonce i to, že racionálních čísel je stejně jako přirozených! Tentokrát to ukážeme tak, že racionální čísla uspořádáme následovně:

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\
\frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \cdots \\
\frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \cdots \\
\frac{4}{1} & \frac{4}{2} & \frac{4}{3} & \frac{4}{4} & \frac{4}{5} & \cdots \\
\frac{5}{1} & \frac{5}{2} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} & \frac{5}{5} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

V této tabulce jsou jistě všechna racionální čísla kromě nuly (a každé je tam dokonce nekonečněkrát). Přirozená čísla k nim nyní začneme přiřazovat „po diagonálách“, takže posloupnost racionálních čísel bude: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \ldots$

Problém nastane až u reálných čísel, neboť lze dokázat, že už reálných čísel mezi nulou a jedničkou je „více“, než všech přirozených čísel. Předpokládejme, že jsme do soupisu níže napsali všechna reálná čísla z intervalu $\langle 0; 1)$:

$$\begin{array}{c}
1 \leftrightarrow 0{,}509699580\ldots \\
2 \leftrightarrow 0{,}800000000\ldots \\
3 \leftrightarrow 0{,}196476879\ldots \\
4 \leftrightarrow 0{,}632612055\ldots \\
5 \leftrightarrow 0{,}150051611\ldots \\
6 \leftrightarrow 0{,}146716955\ldots \\
7 \leftrightarrow 0{,}885512680\ldots \\
8 \leftrightarrow 0{,}341101216\ldots \\
\vdots
\end{array}$$

Pak napíšeme číslo x takto: Vždy se podíváme na n-tou číslici za desetinnou čárkou n-tého čísla. Pokud tato číslice bude 0, napíšeme na n-tou pozici čísla x číslici 1, jinak tam napíšeme 0. Číslo x se tedy liší od 1. čísla na 1. místě za desetinnou čárkou, od 2. čísla na 2. místě za desetinnou čárkou, … od n. čísla na

n. místě za desetinnou čárkou, … To ale znamená, že se alespoň v jedné číslici liší od každého čísla v našem seznamu – nemohli jsme tedy napsat všechna reálná čísla z intervalu $\langle 0;1)$!

Ukazuje se tak, že neexistuje jen jedno nekonečno, ale minimálně dvě. Ve skutečnosti existuje ještě více nekonečen, než nekonečno. Dodnes přitom nevíme, jestli mezi nekonečnem, které udává počet přirozených čísel (neboli „spočetně mnoho“, což označujeme $\aleph_0$ – čti „alef nula“), a mezi nekonečnem, které udává počet reálných čísel (neboli „nespočetně mnoho“ – označujeme jej $\mathfrak{c}$ a nazýváme „mohutnost kontinua“), leží ještě nějaké další nekonečno. Jinými slovy, nevíme, zda platí, že $\mathfrak{c} = \aleph_1$.

Zábavným myšlenkovým experimentem, který na problémy nekonečna ukazuje, je Hilbertův hotel, což je hotel s nekonečně mnoha jednolůžkovými pokoji, přičemž pokoje jsou očíslovány přirozenými čísly. Hotel je momentálně plně obsazen, v každém pokoji je jeden host.

Zkus recepčnímu poradit, co má dělat, když

(a) přijde nový host;
(b) přijde pět dalších hostů;
(c) přijede plně obsazený autobus s nekonečně mnoha sedačkami;
(d) přijede nekonečně mnoho plných vlaků, které mají nekonečně mnoho vagónů, v každém z nichž je přitom nekonečně mnoho míst.

Třetí krize matematiky

Tyto a podobné hrátky s nekonečny vedly matematiky k uvědomění, že se základy matematiky něco není v pořádku, protože mnoho takových paradoxů bylo těžké vyřešit. Problém byl především s tzv. *Russellovým paradoxem,* objevený *Bertrandem Russellem* na samém počátku 20. století.

Aby se s ním vypořádali, hledali matematici novou, tzv. *axiomatickou výstavbu matematiky.* Už už se zdálo, že vše vyřešila *Zermelova-Fraenkelova teorie množin,* jenže pak v roce 1931 přišel brněnský rodák *Kurt Gödel* se svými *větami o neúplnosti,* které zjednodušeně řečeno říkají, že jakákoliv teorie, která obsahuje přirozená čísla (což je v matematice prakticky úplně vše) je buďto sporná (takže v ní jde současně dokázat nějaké tvrzení i jeho opak), nebo neúplná (takže v ní vždy bude existovat alespoň jedno tvrzení, u nějž nejde dokázat ani tvrzení samo, ani jeho opak). Toto vedlo ke *třetí krizi matematiky,* která trvá dodnes.

Kurt Gödel

Kurt Gödel se narodil 28. dubna 1906 v Brně v tehdejším Rakousku-Uhersku do německé protestantské rodiny. Jeho předci přitom nebyli neznámí v kulturním životě města Brna. Po rozpadu Rakouska-Uherska tak Gödelovi získali českou národnost. Kurt se však ve 23 letech rozhodl přijmout rakouské občanství, takže se v roce 1938 po anšlusu Rakouska stal automaticky Němcem. Emigroval ale do USA a po 2. světové válce přijal americké občanství.

V Brně vystudoval základní školu a II. německé reálné gymnázium, ale univerzitní studia se rozhodl absolvovat ve Vídni, kde je také roku 1929 úspěšně ukončil. Původně studoval fyziku, ale nakonec se ještě v průběhu studia rozhodl věnovat matematice a logice. V roce 1931 pak publikoval výše zmíněné *věty o neúplnosti*.

Politická situace jej pak přiměla emigrovat do Ameriky, kde působil na Princetonu a stal se blízkým přítelem Alberta Einsteina. Již dříve se stal legendou pro své objevy a na Princetonu tak byl vyhledávanou osobou, od níž se očekávaly další převratné výsledky. To nemělo dobrý vliv na plachého, uzavřeného a pečlivého až puntičkářského samotáře, kterým se postupně stal.

Od útlého mládí chatrné zdraví, traumata světové války i neúměrný stres se podepsaly na jeho psychických potížích, které se stářím a odchodem vrstevníků a blízkých přátel prohlubovaly. Trpěl paranoidním strachem, že se jej někdo snaží otrávit, a byl tak schopen jíst pouze jídla připravená jeho ženou Adele.

Ke konci roku 1977, když byla Adele po dobu 6 měsíců v nemocnici, Gödel odmítal jakékoliv jídlo, což vedlo až k jeho smrti hladem 14. ledna 1978, když vážil pouhých 29 kg.

I přes jeho poněkud neslavný konec zůstává Gödel jedním z nejvýznamnějších logiků všech dob, s obrovským dopadem na vědecké a filozofické myšlení 20. století. Ačkoliv nebyl Čechem, zůstává jedním z nejvýznamnějších brněnských rodáků všech dob a je velká škoda, že v povědomí brněnské, potažmo české veřejnosti, má jen velmi malé – pokud nějaké – místo.